ویژگی‌های ریاضی ستاره‌های مــــرتبۀ nاُم

آموزشی

هادی صفری
دانش‌آموز ریاضی ـ فیزیک
مرکز پرورش استعدادهای درخشان و پژوهشگران جوان
واحد شهید بهشتی شهرکرد

چکیده

هر چندضلعی شامل تعدادی رأس، تعدادی ضلع و چندین قطر است. در برخی چندضلعی‌ها، از برخورد قطرها شکل‌های زیبایی شبیه به شکل‌هایی که به‌طور عمومی آن‌ها را به نام ستاره می‌شناسند، تشکیل می‌شوند که با کمی دقت قابل تشخیص هستند. در این مقاله، به بررسی برخی ویژگی‌های این شکل‌های ستاره‌مانند و چندضلعی‌های سازندۀ آن‌ها پرداخته شده است.

کلیدواژه: چندضلعی، ستاره، هندسه مسطحه، آنالیز ترکیبی، ریاضیات محض.

مقدمه

مطلب کوتاهی در صفحۀ ۳۲۶ کتاب ارزشمند «*آموزش هنر حل مسئله*» دربارۀ چندضلعی‌های ستاره‌ای، نگارنده را به این چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایشان علاقه‌مند کرد. نتیجۀ بررسی این ویژگی‌ها را در مقالۀ حاضر می‌خوانید. اما ابتدا برخی تعاریف مورد نیاز ذکر خواهد شد:

چندضلعی[1]: «در هندسه، چندضلعی به شکلی دوبعدی در صفحه گفته می‌شود که با مسیری بسته، شامل تعداد متناهی خطوط راست، محیط شده باشد» (ویکی‌پدیا، دانش‌نامۀ آزاد).

ضلع[2]: «در هندسه، ضلع پاره‌خطی است که دو رأس مجاور را در یک چندضلعی به‌هم متصل می‌کند. بنابراین در عمل، یک ضلع رابطی برای یک پاره‌خط یک‌بعدی و دو شیء صفر بعدی است» (پیشین).

قطر[3]: خطی است که دو رأس غیرمجاور از یک چندضلعی یا چندوجهی را به‌هم متصل می‌کند» (پیشین).

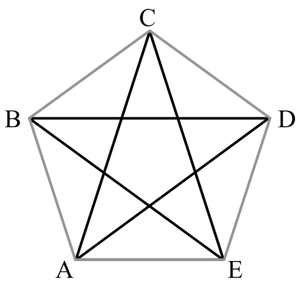
چندضلعی محدب: «چندضلعی کوژ (محدب) یک چندضلعی است که اگر از هر دو رأس آن خطی به‌هم وصل کنیم، آن خط از داخل چندضلعی عبور کند. [اثبات می‌شود که] یک چندضلعی، کوژ است اگر و تنها اگر هیچ‌یک از زاویه‌های داخلی آن بیشتر از ۱۸۰ درجه نباشند» (پیشین).

در ادامه، خلاصۀ مطلبی که دربارۀ چندضلعی‌های ستاره‌ای در کتاب «*آموزش هنر حل مسئله*» آمده است، نقل می‌شود.

یک دایره رسم کنید و سپس پنج نقطه را روی محیط آن علامت بزنید. این پنج نقطه را به‌هم متصل کنید. در این حالت یک پنج‌ضلعی به همراه قطرهای آن به‌دست می‌آید. اگر اضلاع پنج‌ضلعی و دایره را در نظر نگیرید، یک ستارۀ پنج‌پر مشاهده می‌کنید. گاهی از این روش اشکالی به‌دست می‌آیند که حاصل اجتماع چندضلعی‌های کوچک‌ترند. برای مثال، یک ستارۀ شش‌پر حاصل اجتماع دو مثلث است.

ارائۀ روشی برای رسم ستاره‌وارهای n پَر

بیایید تا بار دیگر متن کوتاه فوق را با تعمق بیشتری بررسی کنیم. به شکل ۱ توجه کنید.



شکل ۱ـ یک ستارۀ پنج‌پر حاصل از قطرهای یک پنج‌ضلعی محدّب

اولین نکته‌ای که توجه فرد را جلب می‌کند، روش رسم پنج‌ضلعی است. چرا از دایره برای رسم پنج‌ضلعی کمک گرفته شده است؟ هدف آن بوده است که پنج‌ضلعی حاصل، شکلی محدب باشد. قضیۀ ۱ به بررسی این مسئله می‌پردازد. این مسئله روشی برای رسم یک چندضلعی محدب ارائه می‌کند.

قضیهٔ ۱. هر چندضلعی که رئوس آن روی محیط یک دایره قرار گیرند، محدب است.

اثبات: فرض کنید تمام رئوس چندضلعی روی محیط یک دایره باشند. بنابراین، هر سه نقطهٔ A، B و C روی محیط دایره و برهم نامنطبق هستند. پس $\widehat{ABC}$ یک زاویهٔ محاطی از دایره است. زاویهٔ محاطی از زاویه‌ای برابر نصف کمان روبه‌روی خود برخوردار است و دایره نیز کمانی ۳۶۰ درجه‌ای است. برای این زاویه می‌توان سه حالت متصور شد:

$\widehat{ABC} > ۱۸۰ \rightarrow$ کمان متناظر زاویه $>$ ۳۶۰ $\rightarrow$ تمام دایره $>$ بخشی از دایره $\rightarrow$ تناقض

$\widehat{ABC} = ۱۸۰ \rightarrow$ یک ضلع سه رأس را به‌هم متصل کرده است. $\rightarrow$ تناقض

$\widehat{ABC} < ۱۸۰$:قابل پذیرش

بنابراین تمـــام زوایای چندضلعی مورد بحث کوچک‌تر از ۱۸۰ درجه هستند؛ پس چندضلعی محدب است. ■

به شکل ۱ توجه کنید. ستارهٔ پنج‌پر شامل یک پنج‌ضلعی در وسـط و پنـج مثلـث روی اضلاع آن اسـت. در این مقاله سـتاره‌واری nپَر که شـامل یک nضلعی در وسط و n مثلث (حاصـل از امتداد اضلاع nضلعی) روی اضلاع آن اسـت، یک **سـتاره از مرتبه nاُم** نامیده می‌شـود. بر این اساس، خطوط پررنگ شکل ۱ یک ستارهٔ مرتبه پنجم را نمایش می‌دهند. در این مقاله نویسنده نماد قراردادی S_n را برای ستاره مرتبهٔ nاُم تعیین کرده است.

برای اثبات‌های بعدی، نیاز به قضایا و روابطی داریم که به بررسی برخی از آن‌ها می‌پردازیم:

قضیهٔ ۲. تعداد قطرهای داخلی یک nضلعی محدب برابر است با: $n(n-3)/2$

اثبات: یک nضلعی شـامل n رأس است. تعداد خطوطی که دو رأس را به یکدیگر متصل می‌کنند، برابر است با: $\binom{n}{2}$. از میان این خطـوط، n پاره‌خط ضلـع و بقیه قطر هسـتند. از آنجا کـه nضلعی محدب اسـت، تمام این قطرهـا (که خطوطی هسـتند کـه دو نقطه از nضلعی را به‌هـم متصل می‌کنند)، درون شـکل قـرار دارنـد. بنابرایـن تعداد قطرهـای داخلی nضلعی برابر است با:

$$\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-1)-2n}{2}$$

$$=\frac{n(n-1-2)}{2}=\frac{n(n-3)}{2} \quad ■$$

قضیهٔ ۳. مجموع زوایای یک n ضلعی محدب برابر اسـت با: ۱۸۰(n-۲).

اثبات (استقرای ریاضی):

● **پایهٔ استقرا (n=۳):** مجموع زوایای مثلث برابر است با ۱۸۰ درجه. (اثبات در اغلب کتاب‌های هندسهٔ پایه بیان شده است.)

● **گام اسـتقرا (n> ۳):** هر n ضلعی محدب را با رسم یکی از قطرهای آن میان دو رأس به فاصلهٔ یک می‌توان به یک مثلث (بـا مجموع زوایای ۱۸۰ درجه) و یک n-۱ ضلعی (با مجموع زوایای ۱۸۰((n-۱)-۲)) تبدیل کرد. بنابراین مجموع زوایای n ضلعی برابر است با:

$$۱۸۰+۱۸۰((n-۱)-۲)=۱۸۰(n-۲)$$

اثبات وجود ستاره‌هایی از مرتبه n

در هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی، nضلعی‌ها حداقل شامل سه ضلع (مثلث) هستند. مثلث هیچ‌گونه قطری ندارد (مطابق قضیهٔ ۲)، بنابر این نمی‌توانیم یک S_3 داشـته باشیم. در چهارضلعی قطرها همرس هستند، پس یک چهارضلعی تشکیل نمی‌دهند؛ بنابراین S_4 هم نداریم. قضیهٔ ۴ بیان می‌کند که ستاره‌هایی از مرتبهٔ پنجم یا بیشتر وجود دارند.

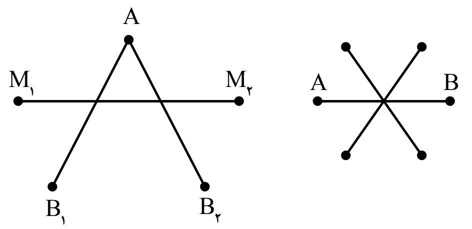
قضیهٔ ۴. به ازای هر n ضلعی (n≥ ۵) ستاره‌ای از مرتبهٔ n وجود دارد.

اثبات: مطابق لم ۱، در شـرایط مفروض قطرهایی که دو سرشـان به فاصلهٔ یک رأس هسـتند، یک nضلعی در وسط تشکیل می‌دهند. لم ۲ بیان می‌کند که n مثلث موردنظر ما هم وجود خواهند داشت. از این دو مسئله حکم اثبات می‌شود. ■

لم ۱: به ازای هر n ضلعی (n≥ ۵)، قطرهایی که دو سرشان به فاصلهٔ یک رأس هسـتند، یک n ضلعی در وسـط تشکیل می‌دهند.

اثبات: تنها قطرهایی برای رسم n ضلعی کوچک‌تر و سپس ستارهٔ مرتبهٔ n مورد استفاده قرار می‌گیرند که بین دو سر آن‌ها، تنها یک رأس فاصله باشد. در این صورت به هر رأس، دقیقاً دو قطر مفروض متصل می‌شود (یکی رو به جلو و دیگر رو به عقب). در این صورت برای رأسی مثل A، رأس‌هایی مانند B_1 و B_2 برای سر دیگر قطرها و دو رأس مثل M_1 و M_2 برای فاصلهٔ میان دو سر هر قطر نیازمندیم. پس nضلعی باید حداقل پنج رأس داشته باشد ($n \geq 5$). عکس قضیه بدیهی است.

همچنین، حداکثر تعداد قطرهای مفروض همرس در هر نقطهٔ درون چندضلعی برابر است با: ۲. اگر این تعداد بیشتر از ۳ باشد، می‌توانیم فقط سه‌تا از آن‌ها را در نظر بگیریم.



شکل۲ــ مربوط به اثبات لم‌های ۱ و ۲

برهان خلف: فرض کنید سه قطر مفروض در یک نقطه درون چندضلعی همرس هستند. در این صورت مطابق شکل ۲ بین دو سر قطر AB حداقل ۲ رأس قرار دارد و از آنجا که: $2>1$، به تناقض برمی‌خوریم (فرض کرده بودیم بین هر دو قطر مفروض، دقیقاً یک رأس فاصله باشد). بنابراین فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌شود. ■

لم ۲: در شرایط مفروض لم ۱، هر سه قطری مانند AB_1، AB_2 و M_1M_2 (این نقاط همان نقاط لم ۱ هستند.) مثلثی می‌سازند که ضلعی دارد که قطر nضلعی نیست. (بدیهی است که در این صورت این ضلع از یکی از اضلاع n ضلعی کوچک‌تر خواهد بود.)

اثبات: با رسم M_1M_2، برای A سه حالت زیر متصور خواهد بود (در عبارات زیر فرض کرده‌ایم B_1B_2 پایین‌تر از M_1M_2 قرار دارند):

- A پایین M_1M_2 قرار دارد: بنابراین M_1M_2 که پاره‌خطی میان دو نقطه از چندضلعی محدب است، از خارج چندضلعی محدب می‌گذرد (تناقض).
- A روی M_1M_2 قرار دارد: پس قطر M_1M_2 سه رأس را به یکدیگر متصل کرده است (تناقض).
- A بالای M_1M_2 قرار دارد: پس مثلث موردنظر ما تشکیل می‌شود (اثبات حکم).

توجه کنید که در این اثبات فرض شده است چندضلعی حداقل پنج رأس دارد. ■

تعداد ستاره‌های حاصل از قطرهای یک nضلعی

اگر تعداد ستاره‌های یک n ضلعی را با f(n) و تعداد ستاره‌های مرتبهٔ kام یک n ضلعی را با f(k,n) نشان دهیم، آن‌گاه:

$$f(n)=\sum_{k=5}^{n} f(k,n)$$

- **قضیهٔ ۵:** $\binom{n}{k}=f(k,n)$

- **اثبات (استقرای ریاضی):** اگر k>n، آن‌گاه همان‌طور که انتظار داشتیم: $\binom{n}{k}=0=f(k,n)$ ؛ وگرنه:

- **پایهٔ استقرا** (n=k): با توجه به اینکه برای رسم هر S_k دقیقاً به k رأس نیاز داریم، بدیهی است که: $f(n,n)=1$. از طرف دیگر می‌دانیم: $\binom{n}{n}=1$. پس داریم: $\binom{n}{n}=f(n,n)$.

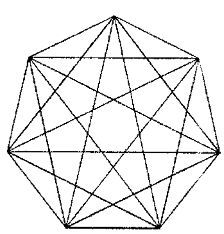
- **گام استقرا** (n>k): با انتخاب k رأس به یک kضلعی محدب می‌رسیم که مطابق اثبات پایه، تنها یک ستاره از مرتبهٔ n در آن وجود دارد. برای انتخاب این n-k رأس، $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ حالت وجود دارد. پس حکم با استقرای ریاضی ثابت شد. ■

با توجه به فرمول فوق، قضیهٔ ۵ و آنکه $2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$، داریم:

$$f(n)=\sum_{k=5}^{n} f(k,n)=\sum_{k=5}^{n}\binom{n}{k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{k=0}^{4}\binom{n}{k}=2^n-\sum_{k=0}^{4}\binom{n}{k}$$

پس ثابت کردیم تعداد ستاره‌های حاصل از برخورد قطرهای یک n ضلعی برابر است با: $2^n-\sum_{k=0}^{4}\binom{n}{k}$. ■

برای مثال به شکل ۳ توجه کنید. این شکل تمام ستاره‌های حاصل از برخورد قطرهای یک هفت‌ضلعی را نشان می‌دهد. در این شکل ستارهٔ مرتبه هفتم و ستاره‌های مرتبهٔ ششم نشان داده شده‌اند.

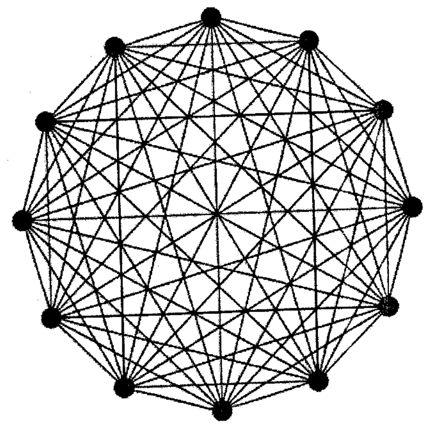


شکل ۳ــ نمایش تصویری f(۷)

حالا به محاسبهٔ f(۷) می‌پردازیم:

$$f(7)=2^7-\sum_{k=0}^{4}\binom{7}{k}=29$$

به‌عنوان نمونه‌ای دیگر می‌توانید تعداد ستاره‌های حاصل از برخورد قطرها در یک دوازده‌ضلعی منتظم (شـکل ۴) را با کمک همین رابطه بشمارید.



شکل ۴ـ دوازده‌ضلعی منتظم و نمایش f(۱۲)

مجموع زوایای داخلی یک ستاره از مرتبه n

مطابق تعریف، هر S_n شامل یک n ضلعی و n مثلث است. بنابراین مجموع زوایای داخلی S_n برابر مجموع زوایای n ضلعی محدب و n برابر مجموع زوایای مثلث اسـت. در این صورت و با توجه به قضیهٔ ۳، مجموع زوایای داخلی سـتاره از مرتبهٔ n برحسب درجه برابر است با:

■ $180(\text{ک}-2)+180\text{ک}=180(\text{ک}+\text{ک}-2)=360(\text{ک}-1)$

به‌عنوان نمونه، مجموع زوایای داخلی یک S_5 (شـکل ۱) برحسب درجه برابر است با: $1440=360(5-1)$

بررســی امکان رسـم سـتاره‌ای از مرتبهٔ n بدون برداشتن مداد از روی کاغذ

با بررســی چنـد حالت خـاص کار را آغـاز می‌کنیم. با آزمایش می‌توانیم متوجه شـویم که S_5 و S_7 را می‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد، اما دربارهٔ S_6 و S_8 این کار امکان‌پذیر نیسـت. از این موضوع می‌توان حدس زد که: «این عمل دربارهٔ S_n ممکن است، اگر و فقط اگر n عددی فرد باشد.» حالا باید این نتیجهٔ استقرایی را به کمک استدلال استنتاجی اثبات کنیم. توجه کنید که چون n عددی طبیعی است، یا فرد است یا زوج.

ابتـدا رئوس n ضلعی را از ۰ تـا ۱-n نام‌گذاری می‌کنیم. قطرهای موردنظر، قطرهایی هسـتند که فاصلهٔ بین دو سـر آن‌ها دقیقاً یک رأس است. می‌توانیم رئوس n ضلعی را رئوس گراف جهت‌دار G و قطرهای موردنظر را یال‌های جهت‌دار G فرض کنیم (از ۰ تا ۱-n). یال (قطر) e_n از رأس v_n به رأس v_i به‌طوری‌که ۲ + کف متصل است. نام‌گذاری رئوس را از نقطهٔ آغاز حرکت شروع می‌کنیم.

با توجه به آنکه از v_0 حرکت آغاز شده است و گام حرکت نیز ۲ اسـت، در اولین مرحله تمام رئوس دارای شمارهٔ زوج به اصطلاح دیده می‌شوند. اگر n فرد باشد، از آخرین رأس مرحلهٔ اول ۱-n به رأس شـمارهٔ ۱ می‌رویم و در این مرحله (مرحلهٔ دوم) تمـام رأس‌های فرد (تمام رأس‌های مانده) را می‌بینیم و به این ترتیب تمام یال‌ها (قطرها) بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم می‌شوند. اما اگر n عددی زوج باشد، از آخرین رأس مرحلهٔ اول (۲-n) به رأس شـمارهٔ ۰ می‌رسـیم که قبلاً آن را دیده بودیم. در اینجا مجبوریم با برداشتن مداد از روی کاغذ به رأس شمارهٔ ۱ (یا هر رأس فرد (ماندهٔ) دیگری) برویم و مرحلهٔ دوم را از آنجـا آغاز کنیم تا تمام رأس‌های فرد (مانده) در این مرحله دیده و تمام یال‌ها (قطرها) نیز رسم شوند. ■

به زبان نظریهٔ گراف، اگر شکل را گرافی ساده فرض کنیم، به هر رأس دو یال (ضلع) وصل شده است. بنابراین درجهٔ هر رأس زوج (۲) اسـت. از طـرف دیگر، اگر n فرد باشـد، گراف حاصل گرافی «همبند» است. بنابراین اگر گرافی اویلری است، امکان رسـم آن بدون برداشتن قلم از روی صفحه وجود دارد. اما اگر n زوج باشد، ستارهٔ مرتبهٔ n گرافی ناهمبند است (بین دو رأس متوالی هیچ مسیری وجود ندارد.) بنابراین نمی‌تواند گرافی اویلری باشـد و رسـم آن بدون برداشتن از روی کاغذ ممکن نیست. (توجه کنید که نقاط برخورد خطوط در وسط ستاره رأس به‌حسـاب نمی‌آیند، بنابراین ستارهٔ مرتبهٔ پنجم گرافی از مرتبهٔ پنج است.)

نتیجه‌گیری

نگارنـده ابتـدا سـتاره‌ای از مرتبـهٔ n (S_n) را به‌صـورت سـتاره‌واری n پر که شـامل یک n ضلعی در وسط و n مثلث روی اضلاع آن اسـت، تعریف کرد و سـپس به بررسی برخی ویژگی‌های S_n پرداخت. ابتدا ثابت شد S_n اگر و فقط اگر[4] $n>5$ وجود دارد. در مراحل بعد اثبات شد، تعداد ستاره‌های حاصل از برخـورد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر $2^{\text{ک}}-\sum_{\text{ف}}^{4}\binom{\text{ک}}{\text{ف}}$ است. در ادامه ثابت شد که مجموع زوایای داخلی یک S_n (در صورت وجود شکل) برابر ۳۶۰ (۱-n) است. در انتها نیز اثبات شـد: اگر و فقط اگر n فرد باشد، می‌توان S_n را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم کرد.

لازم بـه ذکر اسـت در این مقاله تنها به بررسـی برخی ویژگی‌های هندسـی و ریاضی سـتاره‌های n پَر پرداخته شد و دربارهٔ مبانی فلسـفی، تاریخی و دین‌شناسـی این اشـکال ستاره‌گونه بحثی انجام نشد.